Izvorni članak UDK 159.955.6: 16: 34
Primljeno 07. 09. 2005.

Berislav Žarnić
Sveučilište u Splitu, Filozofski fakultet, Teslina 12, HR-21000 Split
berislav@ffst.hr

Jedan sustav obilježene prirodne dedukcije za Kangerovu teoriju prava

Sažetak

U radu se Basin-Matthews-Viganò pristup [4][5] izgradnji sustava obilježene prirodne dedukcije za normalne modalne logike prilagođava »Fitch-formatu« dokaza i primjenjuje na jezik deontičko-prakseološke logike. Formalizira se Segerbergova [22] sugestija o načinu određivanja primjerenosti neke logike za Kangerovu teoriju prava i dokazuje se da ovdje predloženi sustav obilježene prirodne dedukcije zadovoljava Segerbergove uvjete primjerenosti. U dokazu se gradi semantika koja povezuje »najjednostavniju semantiku čina« [9] i standardnu semantiku deontičke logike [2]. Pouzdanost i potpunost predloženog sustava obilježene prirodne dedukcije dokazana je u odnosu na spomenutu semantiku.

Ključne riječi

Stig Kanger, teorija prava, logika, prirodna dedukcija

1. Uvodne primjedbe o Kangerovoj teoriji prava

U filozofskoj logici možemo naći plodonosnu jezgru logike prava.[1] Ona nasljeđuje klasifikaciju prava koju je u drugom desetljeću 20. stoljeća izložio američki pravni teoretičar Wesley Hohfeld [11] i čiju je formalno-semantičku eksplikaciju u drugoj polovini 20. stoljeća izgradio Stig Kanger. Kanger[2] je eksplicirao pojam prava kao TROčlani odnos između 1. »nositelja prava« i 2. »protustranke prava« s obzirom na 3. »predmet prava«, gdje jedan od subjekata pravnog odnosa ima prema drugome[3] obvezu ili dopuštenje izvedbe radnje koja je predmet prava. U formalnom smislu Kanger razlaže pojam prava korištenjem kombinacije deontičkog operatora i prakseološkog operatora[4]

[1] U ovom radu termin ‘pravo’ koristi se u onom smislu u kojem se u engleskom jeziku koristi naziv ‘right’ (za razliku od ‘law’), u slovenskom ‘pravica’ (za razliku od ‘prava’). Neki domaći autori [24] koriste termin ‘subjektivno pravo’.

[2] U ovom radu pretpostavlja se upoznatost s osnovama Hohfeldove i Kangerove teorije prava. Na hrvatskom se jeziku iscrpan prikaz i kritička analiza spomenutih teorija može naći u [19]. Također , od pomoći može biti i [26].

[3] Usmjerenost obveze ili dopuštenja nije zahvaćena u Kangerovoj teoriji. Analiza tog nedostatka s prijedlogom ispravke dana je u [1]. Alternativno rješenje spomenute slabosti dano je u [8].

[4] Slično povezivanje deontičkog operatora i operatora radnje nalazimo i u radu F. Fitcha [7] iz 1965., gdje se oni koriste za razjašnjenje pojma ‘obvezatne radnje’: »(should do *p*) ≡ O(does *p*)«. Imajući u vidu da je Kangerov rad iz 1957. u kojemu su povezuju dva spomenuta operatora objavljen u skromnoj nakladi, za pretpostaviti je da je riječ o istodobnim i neovisnim otkrićima.

(operatora radnje). Na primjer, pravo traženja (zahtjev) kao jedna vrsta prava dobiva sljedeće razjašnjenje: nositelj prava *X* ima pravo traženja u odnosu na protustranku *Y* s obzirom na stanje stvari φ ako i samo ako mora biti tako da čini da bude slučaj φ.

U *Rights and Parliamentarism* [15] Kanger navodi pet načela[5] za modalne operatore *O* (u izvorniku: Shall) i δ_X (u izvorniku[6]: X sees to it that).

Kangerova načela <1.1>

$$(*sRC)\ \frac{\vdash \varphi \rightarrow \psi}{\vdash O\varphi \rightarrow O\psi}$$

$$(*s2)\ \left(O\varphi \wedge O\psi\right) \rightarrow O(\varphi \wedge \psi)$$

$$(oD)\ O\varphi \rightarrow \neg O \neg \varphi$$

$$(dRC)\ \frac{\vdash \varphi \leftrightarrow \psi}{\vdash \delta\varphi \leftrightarrow \delta\psi}$$

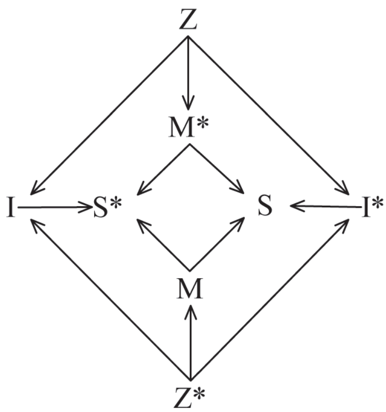
$$(dT)\ \delta\varphi \rightarrow \varphi$$

Gornja načela trebaju omogućiti dokazivanje implikacijskih odnosa između jednostavnih prava, to jest između prava koja se mogu iskazati u shemi:

+/-[obvezatnost] +/-[radnja] $_{\text{nositelj prava/protustranka prava}}$ +/- [rezultirajuće stanje stvari], to jest,

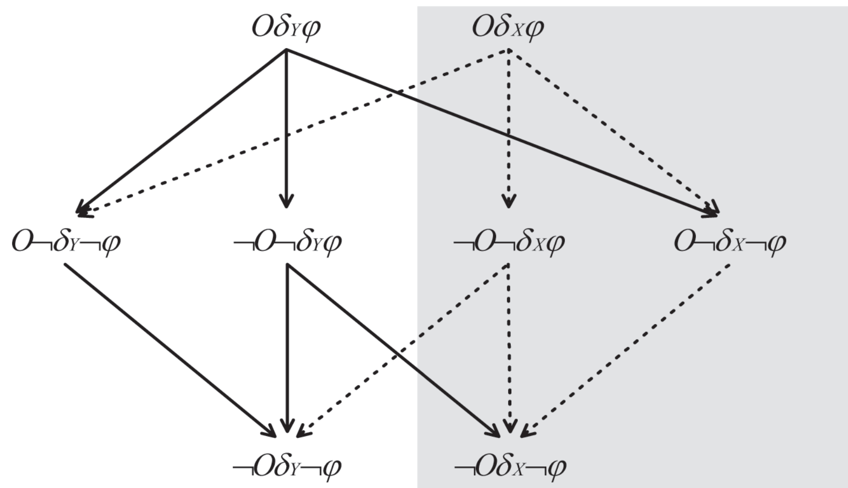
$$\underset{1.}{{}^{+}\!/_{-}}\ O\ \underset{2.}{{}^{+}\!/_{-}}\ \underset{3.}{\delta^{X}\!/_{Y}}\ \underset{4.}{{}^{+}\!/_{-}}\ \varphi$$

Budući da možemo mijenjati četiri vrijednosti, njihove kombinacije daju $4^2 = 16$ formula. S obzirom na isto stanje stvari isti nositelj može imati četiri vrste jednostavnih prava.



Slika <1.2> »Dijagram snage« jednostavnih prava. ‘Z’ stoji za ‘zahtjev’ (claim), ‘S’ stoji za ‘sloboda’ (freedom), ‘I’ stoji za ‘imunitet’ (immunity), ‘M’ stoji za ‘moć’ (power). Slova bez zvjezdice označavaju prava subjekta *X*, slova sa zvjezdicom označavaju prava subjekta *Y*.

Slike <1.2> i <1.3> prikazuju Kangerovu odredbu implikacijskih odnosa[7] između osam jednostavnih prava, odnosno osam deontičko-prakseoloških formula, koje ekspliciraju ta prava. Strelice na dijagramima pokazuju na vrstu prava (odnosno na formulu) koje je posljedica prava (odnosno formule) koje se nalazi na ishodištu strelice. Druga dva[8] »dijagrama snage« za preostalih osam prava, odnosno osam formula, dobili bismo kada bismo svugdje zamijenili φ s ¬φ te obratno, ¬φ s φ.



Slika <1.3> »Dijagram snage« za deontičko-prakseološke formule. Osjenjeni dio sadrži formule koje opisuju deontički status radnji kojima je subjekt *X*. Jednako tome, neosjenčani dio sadrži deontičko-prakseološke formule za subjekt, *Y*. Dvije strukture, jedna opisana punim strelicama, druga isprekidanima, razlikuju se samo po subjektu radnje**.**

Odnosi posljedice za formule s istim subjektom radnje odgovaraju odnosima značenja među modalnim izrazima prirodnog jezika, što možemo prikazati ako ih posložimo u poredak u kojemu je rečenica u nižem retku posljedica rečenice u višem:

Y **mora** učiniti da bude *φ*

Y **ne smije** učiniti da **ne** bude *φ*   *Y* **smije** učiniti da bude *φ*

Y **ne mora** učiniti da **ne** bude *φ*

Posebno je zanimljiv onaj dio »dijagrama snage« koji pokazuje logičke odnose deontičko-prakseoloških formula s različitim subjektima. Dvije od četiri

5
Oznake pravila dodijelili smo tako da sadrže upućivanja na slična dobro poznata načela: *sRC označava oslabljeno pravilo kongruencije, *s2 označava oslabljeni aksiom 2, oD označava deontičku interpretaciju aksioma D, dRC označava prakseološko čitanje pravila kongruencije, dT označava prakseološku interpretaciju T aksioma.

6
Simbol δ_X ovdje koristimo kao operator radnje koji se primjenjuje na rečenice. Kanger koristi oznaku Do i dopisuje unutar zagrada term za djelatnika i rečenicu. Rečenica 'djelatnik α je učinio da bude F' u Kangerovom zapisu prikazuje se o obliku: Do(α,F), ovdje se koristi: zapis δ_α F. Simbol δ koristi se u logici čina. Segerberg [23] ga koristi na drukčiji način: za tvorbu terma; δA označava onu vrstu radnje koja rezultira sa stanjem stvari A. Nasuprot tome, a slično našem pristupu, Walton [25] koristi simbol δ za označavanje modalnog operatora radnje.

7
Slika <1.3> modificirani je prikaz Kangerovog »dijagrama snage«; s deontičko-prakseološkim formulama umjesto »jednostavnih tipova prava«.

8
Nedostajući dijagram za jednostavna prava sadržavao bi »protuprava«. Na njemu bi se našla prava subjekta *X* iz osjenjenih redaka Tablice <1.6> i takva prava za subjekta *Y*. Implikacijski odnosi između prava zadržavaju se ako prava zamijenimo odgovarajućim protupravima (zahtjev s protu-zahtjevom, slobodu s protu-slobodom, imunitet s protu-imunitetom, moć s protu-moći).

takve formule navodimo dolje, koristeći oznaku *Y* za protustranku i *X* za nositelja prava:

<1.4> $O\delta_Y\varphi \Rightarrow O\neg\delta_X\neg\varphi$

<1.5> $\neg O\neg\delta_X\varphi \Rightarrow \neg O\delta_Y\neg\varphi$

Implikacija <1.4> pokazuje da ako nositelj prava *X* ima pravo zahtijevati da protustranka *Y* učini da bude slučaj da φ, onda sam *X* ne smije učiniti da bude slučaj da $\neg\varphi$. Implikacija <1.5> pokazuje da ako *X* ima permisivnu mogućnost učiniti da bude φ, onda *Y* ne mora učiniti da bude $\neg\varphi$. U svjetlu ovih »transverzalnih« implikacija ispitat ćemo Lindahlov [17] način podjele prava na protustrankine obaveze i na nositeljeva dopuštenja.

	Explicandum: [s obzirom na Y i φ]	Explicans:
[O-prava] Dužnosti protustranke Y:	X ima pravo zahtjeva	$O\delta_Y\varphi$
	X ima imunitet	$O\neg\delta_Y\neg\varphi$
	X ima protuzahtjev	$O\delta_Y\neg\varphi$
	X ima protuimunitet	$O\neg\delta_Y\varphi$
[P-prava] Dopuštenja za nositelja X:	X ima slobodu	$\neg O\delta_X\neg\varphi$
	X ima moć	$\neg O\neg\delta_X\varphi$
	X ima protuslobodu	$\neg O\delta_X\varphi$
	X ima protumoć	$\neg O\neg\delta_X\neg\varphi$

Tablica <1.6> Lindahlova klasifikacija Kangerovih »jednostavnih prava«.

»U povijesti analize prava, postoji tradicionalno razlikovanje između, s jedne strane, 'pasivnih prava' ili prava da nam nešto bude učinjeno i, s druge strane, 'aktivnih prava' ili prava da nešto učinimo. U Kangerovoj teoriji jednostavnih tipova prava, prva skupina, O-prava, eksplicira se 'obvezama protustranke', dok se druga skupina, P-prava, eksplicira pomoću 'nositeljevih dopuštenja'.« Lindahl [17] str. 153

»Transverzalna implikacija« <1.4> pokazuje da postoje prava tipa »dužnost protustranke« (to jest, zahtjev i protuzahtjev) koja uključuju i dužnost nositelja (ako zabrane, $O\neg$ shvatimo kao dužnosti). S druge strane, implikacija <1.5> pokazuje da postoje pravo tipa »nositeljeva dopuštenja« (moć i protumoć) koje uključuju dopuštenje za protustranku.

Kangerovih pet deontičkih i prakseoloških načela uz dodatak propozicijske logike dovoljna su za dokazivanje svih implikacija prikazanih na »dijagramu snage«. Kao primjere navodimo dokaze navedenih »transverzalnih implikacija«. Dokaze ćemo izvesti u *ad hoc* modificiranom »Lemmon formatu« prirodne dedukcije s pridodanim pravilima oslabljene kongruencije (*sRC) i pune kongruencije (dRC). Neka je rečenica teorem akko jedine pretpostavke o kojima ovisi jesu instance aksiomskih oblika (*s2), (oD) i (dT).

Primjer <1.7> $O\delta_Y\varphi \Rightarrow O\neg\delta_X\neg\varphi$

1	(1)	$O\delta_Y\varphi$	Pretpostavka
2	(2)	$\delta_Y\varphi \rightarrow \varphi$	Aksiom (dT)
3	(3)	$\delta_X\neg\varphi \rightarrow \neg\varphi$	Aksiom (dT)
3	(4)	$\varphi \rightarrow \neg\delta_X\neg\varphi$	Kontrapozicija: 3
2,3	(5)	$\delta_Y\varphi \rightarrow \neg\delta_X\neg\varphi$	Hipotetički silogizam:2, 4
2,3	(6)	$O\delta_Y\varphi \rightarrow O\neg\delta_X\neg\varphi$	Pravilo (*sRC): 5
1,2,3	(7)	$O\neg\delta_X\neg\varphi$	Modus ponens: 1, 6
2,3	(8)	$O\delta_Y\varphi \rightarrow O\neg\delta_X\neg\varphi$	Uvođenje kondicionala: 1, 7

Primjer <1.8> $\neg O\neg\delta_X\varphi \Rightarrow \neg O\delta_Y\neg\varphi$

1	(1)	$\neg O\neg\delta_X\varphi$	Pretpostavka
2	(2)	$O\delta_Y\neg\varphi$	Pretpostavka
3	(3)	$O\delta_Y\neg\varphi \rightarrow O\neg\delta_X\varphi$	Teorem[9]
2,3	(4)	$O\neg\delta_X\varphi$	Modus ponens: 2,3
2,3	(5)	$\neg O\neg\delta_X\varphi \wedge O\neg\delta_X\varphi$	$\wedge$ Intro: 2, 4
3	(6)	$\neg O\delta_Y\neg\varphi$	$\neg$ Intro: 2,5
3	(7)	$\neg O\neg\delta_X\varphi \rightarrow \neg O\delta_Y\neg\varphi$	$\rightarrow$ Intro: 1, 6

2. Obilježeni sustavi prirodne dedukcije za normalne modalne logike

U novije vrijeme Basin, Matthews i Vigano [4] [5] razvili su zanimljiv[10] sustav obilježene prirodne dedukcije (»labelled deduction«) za normalne[11] modalne logike. U takvom se sustavu normalne modalne logike dijele na dva povezana dijela: na osnovnu logiku, koja je zajednička različitim modalnim logikama, te na relacijsku teoriju, koja uspostavlja razlike među njima. U osnovnoj logici zaključuje se o formulama koje nose svoju oznaku. Da bismo dokazali da je formula φ valjana u nekom razredu okvira dokazivat ćemo obilježenu formulu $w_i : \varphi$, gdje je, intuitivno gledajući, w_i indeks koji označava proizvoljni mogući svijet proizvoljnog okvira $\langle W, R\rangle$ unutar ispitivanog razreda okvira. U relacijskoj teoriji opisuju se svojstva relacije dostupnosti i time se određuje

9
Dokaz uporabljenog teorema dobivamo preinakom dokaza iz Primjera <1.7>: potrebno je uvrstiti $\neg\varphi$ na mjestima na kojima se javlja φ i obratno. Činjenica da rečenica $\neg O\neg\delta_X\varphi \rightarrow \neg O\delta_Y\neg\varphi$ ovisi jedino o tome teoremu pokazuje da ona ovisi samo o instancama aksiomskih shema.

10
Po pohvalnoj ocjeni Stephena Reada, predloženi sustav obilježene prirodne dedukcije pruža »harmonična« modalna pravila, to jest pravila takva da eliminacijska pravila ne dodaju ništa novo već samo razlažu ono što se može izvesti iz konkluzije introdukcijskog pravila kada su dane njezine premise [20], str. 6.

11
Modalna logika L naziva se normalnom ako ona sadrži sve instance aksiomskog oblika (K) $\Box(\varphi\rightarrow\psi)\rightarrow(\Box\varphi\rightarrow\Box\psi)$ i zatvorena je pod (RN) pravilom necesitacije (modalne generalizacije): ako $\varphi\in L$ onda $\Box\in L$. Postoje uvjeti ekvivalentni spomenutom, (K+RN). Jedan među takvim uvjetima je zatvorenost pod Scottovim pravilom: $\dfrac{(\varphi_0\wedge\ldots\wedge\varphi_{n-1})\rightarrow\psi}{(\Box\varphi_0\wedge\ldots\wedge\Box\varphi_{n-1})\rightarrow\Box\psi}$, $n\geq 0$. Prema [21] str. 8. U [6] normalnom modalnom logikom naziva se logika koja sadrži sve tautologije, sve instance K aksiomske sheme, sve instance aksioma dualnosti, te koja je zatvorena pod pravilom *modus ponens*, pravilom necesitacije i pravilom jednolike supstitucije.

vrsta okvira. Radi jednostavnosti prikaza, autori relacijsku teoriju ne izlažu kroz rečenice logike prvog reda ili, gdje bi to bilo potrebno,[12] kroz rečenice logike višeg reda. Umjesto toga, autori modalnim aksiomima pridružuju odgovarajuće pravilo $\dfrac{R(t_1,s_1)...R(t_m,s_m)}{R(t_0,s_0)}$, $m \geq 0$, gdje su t_i i s_j termi sastavljeni od oznaka $w_1,...,w_n$ i simbola za Skolemove funkcije. Na primjer, modalnom aksiomskom obliku (D) $\Box\varphi\rightarrow\Diamond\varphi$ korespondira aksiom prvoga reda $\forall x\exists y R(x, y)$. Relacijska teorija za logiku koja uključuje (D) umjesto iskaza o serijalnosti odnosa dostupnosti sadržavat će pravilo: $\dfrac{}{R(w_i, f(w_i))}$.

Basinov, Matthewsov i Viganov sustav obilježene prirodne dedukcije prikazujemo u modificiranom obliku. U prikazu se oslanjamo na Makinsonovo [18] razlikovanje deduktivnih pravila prve razine, koja omogućuju prijelaz s rečenice (rečenica) na rečenicu i deduktivnih pravila druge razine, koja omogućuju prijelaz s dokaza na dokaz.

Uvođenje modalnog $\Box$ operatora ($\Box Intro$)

$$\frac{\Gamma, R(w_i, w_j) \vdash w_j : \psi}{\Gamma \vdash w_i : \Box\psi}$$

$[w_j$ je novi indeks$]$

Isključivanje modalnog $\Box$ operatora ($\Box Elim$)

$$R(w_i, w_j), w_i : \Box\varphi \vdash w_j : \varphi$$

Uvođenje modalnog $\Diamond$ operatora ($\Diamond Intro$)

$$R(w_i, w_j), w_j : \varphi \vdash w_i : \Diamond\varphi$$

Isključivanje modalnog $\Diamond$ operatora ($\Diamond Elim$)

$$\frac{\Gamma, R(w_i, w_j), w_j : \varphi \vdash w_k : \psi}{\Gamma, w_i : \Diamond\varphi \vdash w_k : \psi}$$

$[w_j$ je novi indeks$]$

Uz jednu važnu iznimku, pravila prirodne dedukcije za propozicijsku logiku ostaju nepromijenjena, ali lokalizirana u primjeni na rečenice obilježene istom oznakom. Na primjer, pravila za pogodbu (kondicional) su:

$\rightarrow Intro$

$$\frac{\Gamma, w_i : \varphi \vdash w_i : \psi}{\Gamma \vdash w_i : \varphi \rightarrow \psi}$$

$\rightarrow Elim$

$$w_i : \varphi \rightarrow \psi, w_i : \varphi \vdash w_i : \psi$$

Basin i ostali [5] ispituju svojstva različitih načina na koji se pojava neistine (*falsum*, $\perp$) u sustavu obilježene dedukcije može pojmiti. Pojava neistine na jednom mjestu (svijetu) može pokazivati neistinitost tvrdnje na nekom drugom mjestu. Tako shvaćenu neistinu autori nazivaju globalnom i ona je dovoljna za implementaciju »logika u Geachovoj hijerarhiji«,[13] između ostalih. Ako se dopusti da k tome neistina utječe i na relacijske tvrdnje, onda takvu neistinu možemo nazvati univerzalnom. Tako pojmljena neistina dovoljna je da bi se izgradili sustavi za svaku modalnu logiku koja se može aksiomatizirati u jeziku logike prvoga reda [5]. Za razliku od toga, lokalna neistina ne »putuje« kroz svjetove niti utječe na relacijske tvrdnje. Pojam lokalne neistine nije dovoljan za formalizaciju modalnih logika.

»Izgleda da je K s globalnom neistinom najslabija osnovna logika koja se može proširiti tako da obuhvati jedan koristan raspon modalnih logika.« Basin, Matthews i Vigano [5]

Pravilo za globalnu neistinu autori iskazuju na sljedeći način.

$\bot$ *Elim*

$$\frac{\begin{matrix}[w_i : A \to \bot] \\ \vdots \\ w_j : \bot\end{matrix}}{w_i : A}$$

Budući da ćemo dalje koristiti dokaze u Fitch formatu i dopustiti uporabu pravila za istinitosno-funkcionalne poveznike, te neistinu prema Barwiseovom i Etchemendyjevom pristupu [3], pojam globalne neistine ugradit ćemo u sljedeće pravilo:

$\neg$*Intro*

$$\frac{\Gamma, w_i : A \vdash w_j : \bot}{\Gamma \vdash w_i : \neg A}$$

3. Sustav obilježene dedukcije za Kangerovu deontičko-prakseološku logiku

Načela <1.1>, koja Kanger navodi u *Rigths and Parliamentarism* [15], ne osiguravaju svojstvo normalnosti[14] za logiku koja bi obuhvatila dva operatora,

12
Na primjer, korespondentni aksiom za McKinseyev aksiom $\Box\Diamond\varphi\to\Diamond\Box\varphi$. ne može se iskazati u logici prvoga reda.

13
Logikama u Geachovoj hijerarhiji autori nazivaju logike koje pored aksiomskog oblika K sadrže aksiome koji potpadaju pod općenitu Geachovu aksiomsku shemu: $\Diamond^i\Box^m\varphi\to\Box^j\Diamond^n\varphi$, $i, j, m, n \geq 0$.

14
Promotrimo slučaj O operatora. Koristeći *sRC, *s2 i propozicijsku logiku možemo dokazati deontičku varijantu K aksioma. Ali pravilo necesitacije ne možemo dokazati jer ono omogućuje nastanak »modalnog konteksta«, to jest formule oblika $O\varphi$. Pretpostavimo da je to ipak moguće u nekom hilbertovskom sustavu propozicijske logike proširenom sa *s2 i oD koji sadrži kao pravila dokaza: modus ponens, jednoliku supstituciju i *sRC. Neka je dan neki dokaz u takvom sustavu i neka je $O\varphi$ prva pojava formule s modalnim kontekstom. Budući da nijedan aksiom nije formula s modalnim kontekstom, $O\varphi$ je morao biti izveden. Pravilo *sRC ne omogućuje dokaz takve formule, pa preostaju ostala dva. Jednolika supstitucija može dati $O\varphi$ samo ako je dobivena zamjenom propozicijskih slova u nekoj formuli $O\psi$, ali onda $O\varphi$ nije prva

deontički i prakseološki. Budući da Kanger piše da su spomenuta načela samo neka među načelima koje bi operatori trebali zadovoljavati ([15] str. 123), pretpostavit ćemo da su pripadajuće logike normalne. Time smo osigurali K logiku kao osnovnu. K njoj ćemo pridodati odgovarajuće relacijske teorije za aksiomske oblike *oD* i *dT*.

Sintaksa jezika deontičko-prakseološke logike

Definicija <3.1> Neka je L_{PL} jezik propozicijske logike. Ako $\varphi \in L_{PL}$, onda $\varphi \in L_{\delta PL}$, $\delta_X\varphi$, $\delta_Y\varphi \in L_{\delta PL}$ i $\neg\delta_X\varphi$, $\neg\delta_Y\varphi \in L_{\delta PL}$ te nijedna druga rečenica osim onih koje imaju jedan od navedenih oblika nije rečenica jezika $L_{\delta PL}$.

Definicija <3.2> Jezik $L_{O\delta PL}$ najmanji je skup koji zadovoljava sljedeće uvjete:

(i) ako $\varphi \in L_{\delta PL}$, onda $\varphi, O\varphi,\ P\varphi \in L_{O\delta PL}$,
(ii) ako $\varphi, \psi \in L_{O\delta PL}$, onda $\neg\varphi,\ \varphi \wedge \psi,\ \varphi \vee \psi,\ \varphi \rightarrow \psi \in L_{O\delta PL}$.

Jezik obilježenih rečenica $L_{w\,:\,O\delta PL}$ dobivamo kada signaturi (skupu nelogičkih simbola) jezika $L_{O\delta PL}$ pridodamo skup I oznaka.

Definicija <3.3> Skup I oznaka ili skup indekasa:
$I = \{w_0, w_1, ..., f(w_0), f(f(w_0)), ..., f(w_1), f(f(w_1)), ...\}$.

Definicija <3.4> Jezik $L_{w\,:\,O\delta PL}$ najmanji je skup koji zadovoljava sljedeće uvjete:

[uvjet za relacijske rečenice] ako $w, v \in I$, onda su $R_O(w,v)$, $R_{\delta X}(w,v)$, $R_{\delta Y}(w,v)$ rečenice jezika $L_{w\,:\,O\delta PL}$,
[uvjet za obilježene rečenice] ako $\varphi \in L_{O\delta PL}$ i $w \in I$, onda je $w : \varphi$ rečenica jezika $L_{w\,:\,O\delta PL}$.

Primjedba <3.5> U jeziku $L_{O\delta PL}$ iteracije operatora nisu dopuštene iako postoji smisleno čitanje za takve rečenice. Na primjer, $O\delta_X\delta_Z\varphi$ bi se moglo protumačiti kao 'X se mora pobrinuti da bude slučaj da je Z učinio da φ bude slučaj'.

Primjedba <3.6> Jezik $L_{O\delta PL}$, a time i nad njime izgrađeni jezik $L_{w\,:\,O\delta PL}$, proširili smo još jednim deontičkim operatorom P, koji je dual za O:

$$\neg O \neg \varphi \Leftrightarrow P\varphi.$$

Pravila obilježene dedukcije za $L_{w\,.\,O\delta PL}$

Pravila obilježene dedukcije za deontičko-prakseološku logiku iskazat ćemo za svaki operator na dva načina: najprije u zapisu koji slijedi Makinsonovo razlikovanje dviju vrsta pravila a potom u »Fitch formatu« dokaza.[15]

Pravilo uvođenja operatora obligacije ($O\ Intro$ **)**

***

$$\frac{\Gamma, R_O(w_i, w_j) \vdash w_j : \psi}{\Gamma \vdash w_i : O\psi}$$

$[w_j$ je novi indeks$]$

***

k.	$R_O(w_i, w_j)$	
	$\vdots$	
l.	$w_j : \varphi$	
m.	$w_i : O\varphi$	O Intro: k-l

[w_j je novi indeks i on se ne smije pojaviti izvan poddokaza u kojemu je uveden]

Pravilo isključivanja operatora obligacije ($O\ Elim$ **)**

***

$$R_O(w_i, w_j), w_i : O\varphi \vdash w_j : \varphi$$

***

k.	$R_O(w_i, w_j)$	
	$\vdots$	
l.	$w_i : O\varphi$	
	$\vdots$	
m.	$w_j : \varphi$	O Elim: k, l

Pravilo uvođenja operatora permisije ($P\ Intro$ **)**

***

$$R_O(w_i, w_j), w_j : \varphi \vdash w_i : P\varphi$$

***

k.	$R_O(w_i, w_j)$	
	$\vdots$	
l.	$w_j : \varphi$	
	$\vdots$	
m.	$w_i : P\varphi$	P Intro: k, l

Pravilo isključivanja operatora permisije ($P\ Elim$ **)**

***

formula s modalnim kontekstom. Preostaje modus ponens primijenjen na nekoj formuli $\psi \rightarrow O\varphi$. ψ ne smije biti formula modalnog konteksta jer onda $O\varphi$ ne bi bila prva takva formula u dokazu. Dakle, ψ nije formula modalnog konteksta. Sada trebamo ispitati je li formula oblika $\psi \rightarrow O\varphi$ izvediva. Dolazimo do toga da je i ona ili njezin supstitucijski prethodnik dobivena primjenom modus-a ponens iz $\delta \rightarrow (\psi \rightarrow O\varphi)$. Prethodno zaključivanje, uz potrebne izmjene, ponavljamo i zapadamo u beskonačno posezanje unatrag koje pokazuje da pravila dokaza ne omogućuju nastanak tražene formule $\psi_1 \rightarrow (\ldots(\psi_{n-1} \rightarrow (\psi_n \rightarrow O\varphi))\ldots)$ u kojoj je $O\varphi$ jedina formula s modalnim kontekstom.

15
Na hrvatskome jeziku sustave je prirodne dedukcije za normalne modalne logike u »Fitch formatu« izložio i ispitao S. Kovač [16]. Za razliku od ovdje predloženog pristupa, u tim se sustavima koriste različita pravila za modalitete u različitim logikama.

$$\frac{\Gamma, R_O(w_i, w_j), w_j : \varphi \vdash w_k : \psi}{\Gamma, w_i : P\varphi \vdash w_k : \psi}$$

$[w_j$ je novi indeks$]$

***

l. $w_i : P\varphi$
$\vdots$
m. $R_O(w_i, w_j)$
n. $w_j : \varphi$
$\vdots$
o. $w_k : \psi$
p. $w_k : \psi$ P Elim: l, m-o

[w_j je novi indeks i on se ne smije pojaviti izvan poddokaza u kojemu je uveden]

Relacijska teorija za deontičke operatore: *O serijalnost*

***

$\vdash R_O(w_i, f(w_i))$

***

$\vdots$
k. $R_O(w_i, f(w_i))$ O serijalnost
$\vdots$

Pravilo uvođenja prakseološkog operatora (δ *Intro* **)**

***

$$\frac{\Gamma, R_{\delta X}(w_i, w_j) \vdash w_j : \psi}{\Gamma \vdash w_i : \delta_X \psi}$$

$[w_j$ je novi indeks$]$

***

k. $R_{\delta X}(w_i, w_j)$
$\vdots$
l. $w_j : \varphi$
m. $w_i : \delta_X \varphi$ δ Intro: k-l

[w_j je novi indeks i on se ne smije pojaviti izvan poddokaza u kojemu je uveden]

Pravilo isključivanja prakseološkog operatora (δ *Elim* **)**

***

$R_\delta(w_i, w_j), w_i : \delta\varphi \vdash w_j : \varphi$

***

k. $R_{\delta X}(w_i, w_j)$
$\vdots$
l. $w_i : \delta_X \varphi$
$\vdots$
m. $w_j : \varphi$ δ Elim: k, l

Relacijska teorija za prakseološki operator: δ *refleksivnost*

***

$\vdash R_\delta(w_i, w_i)$

***

$$\begin{array}{|lll}
 & \vdots & \\
k. & R_{\delta X}(w_i, w_i) & \delta \text{ refleksivnost} \\
 & \vdots &
\end{array}$$

Pravila dedukcije za propozicijsku logiku

Pravila za istinitosno-funkcionalne veznike u potpunosti odgovaraju pravilima prirodne dedukcije za propozicijsku logiku, poput one izložene u [3], pod uvjetom da su sve rečenice koje se koriste u izvodu obilježene istim indeksom. Jedina iznimka jest pravilo za uvođenje negacije.

Pravilo uvođenja globalne negacije ($\neg$ *Intro* **)**

***

$$\frac{\Gamma, w_i : \varphi \vdash w_j : \perp}{\Gamma \vdash w_i : \neg\varphi}$$

***

$$\begin{array}{|l}
\begin{array}{|ll}
k. & w_i : \varphi \\ \hline
 & \vdots \\
l. & w_j : \perp
\end{array} \\
m. \quad w_i : \neg\varphi \qquad \neg \text{ Intro: k-l}
\end{array}$$

4. Primjerenost sustava obilježene prirodne dedukcije za Kangerovu logiku prava

Primjerenost sustava obilježene prirodne dedukcije za Kangerovu teoriju prava, ispitat ćemo slijedeći Segerbergovo razlikovanje minimalnog i maksimalnog uvjeta, koje taj sustav treba zadovoljiti.

»Zapravo, Kanger ne vezuje svoje izlaganje uz jednu jedinstvenu pozadinsku logiku. Radije, on bilježi uvjete koje neka logika mora zadovoljiti da bi odgovarala njegovoj teoriji. [...] takva logika mora podupirati logičke odnose oslikane u gornjim dijagramima. To znači, *minimalni* je *uvjet* taj da logika mora biti dovoljno jaka da omogući izvođenje logičkih implikacija u dijagramima; *maksimalni* je *uvjet* taj da logika ne smije biti toliko jaka da bi omogućila dodavanje novih implikacija u dijagramima.« Segerberg [22] str. 367

Na temelju Segerbergove ideje [22] predlažemo sljedeće definicije.

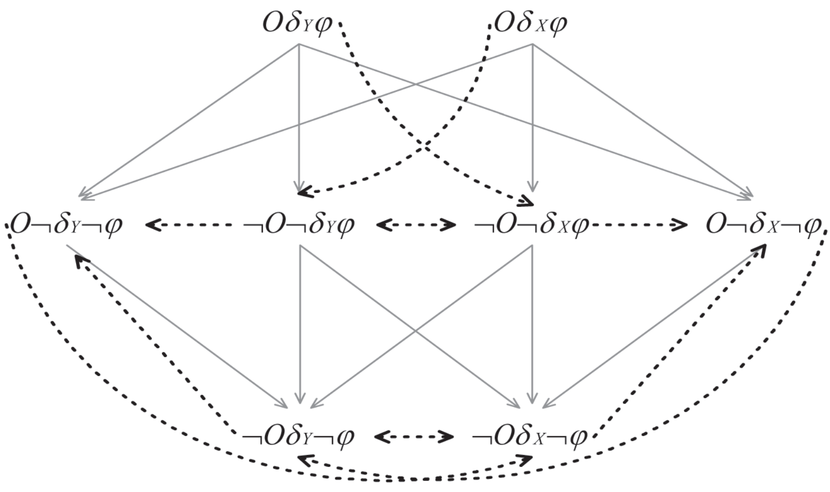
Definicija <4.1> Skup RP^{imp} implikacija je najmanji skup rečenica takav da za svaki $X, Y, Z \in \{Z, I, M, S, Z^*, I^*, M^*, S^*\}$ (i) RP^{imp} uključuje sve implikacije oblika $X \Rightarrow X$, (ii) RP^{imp} uključuje $X \Rightarrow Z$ kad god uključuje $X \Rightarrow Y$ i $Y \Rightarrow Z$ te (iii) RP^{imp} uključuje sve implikacije »dijagrama snage«:

$$
\begin{array}{ll}
Z \Rightarrow I, & Z^* \Rightarrow I, \\
Z \Rightarrow M^*, & Z^* \Rightarrow M, \\
Z \Rightarrow I^*, & Z^* \Rightarrow I^*, \\
M^* \Rightarrow S^*, & M \Rightarrow S^*, \\
M^* \Rightarrow S, & M \Rightarrow S, \\
I \Rightarrow S^*, & I^* \Rightarrow S.
\end{array}
$$

Definicija <4.2> *Skup RP^C implikacija*[16] *je skup rečenica takav da za svaki $X,Y \in \{Z,I,M,S,Z^*,I^*,M^*,S^*\}$: RP^C uključuje sve rečenice oblika $X \Rightarrow Y$ upravo u slučaju kada RP^{imp} ne uključuje $X \Rightarrow Y$, to jest, $X \Rightarrow Y \in RP^C$ akko $X \Rightarrow Y \notin RP^{imp}$.*

Primjedba <4.3> Kolikoće skupova: $\left|RP^{imp}\right| = 24$ i $\left|RP^C\right| = 40$.

Definicija <4.4> Skup $a \subseteq RP^C$ nazivamo predstavnikom skupa RP^C ako za svaku implikaciju $\varphi \in RP^C$ vrijedi: $RP^{imp}, a^N \vdash \neg\varphi$, gdje $\neg\psi \in a^N$ akko $\psi \in a$.



Slika <4.5> Skup *m*, predstavnik skupa RP^C (skupa 'nepoželjnih implikacija') prikazan na strukturi koja sadrži eksplikanse prava. Točkaste, deblje strelica pokazuju od antecedensa prema konzekvensu implikacije koja je član skupa *m*. U pozadini, tanje strelice pokazuju implikacije iz RP^{imp}.

Primjedba <4.6> Skup 'neželjenih implikacija'[17] naveden kod Segerberga [22] nije predstavnik skupa RP^C i redundantan je. Ispitivanje redundantnosti uključivanja implikacije $X \Rightarrow Y$ u *m* možemo provesti na sljedeći način. Ako ne postoji par implikacija: $Y \Rightarrow Z \in RP^{imp}$ i $X \Rightarrow Z \in m$, onda $X \Rightarrow Y$ treba uključiti u *m*. U protivnom slučaju, njezino uključivanje je redundantno.

Definicija <4.7> Logika L ispunjava *uvjet minimalnosti za Kangerovu teoriju* prava akko se svaka implikacija iz RP^{imp} može dokazati u L.

Definicija <4.8> Logika L ispunjava *uvjet maksimalnosti za Kangerovu teoriju* prava akko se niti jedna implikacija iz RP^{C} ne može dokazati u L.

Uvjet minimalnosti

Poučak <4.9> Sustav $\vdash^{opd}_{O\delta}$ obilježene prirodne dedukcije za PR deontičko-prakseološku logiku ispunjava uvjet minimalnosti za Kangerovu teoriju prava; to jest, za svaku implikaciju $\varphi \in RP^{imp}$ vrijedi $\vdash^{opd}_{O\delta} \varphi$.

Dokaz ćemo izvesti ako pokažemo postojanje dokaza u sustavu $\vdash^{opd}_{O\delta}$ za svaku pojedinu implikaciju iz RP^{imp}. Ovdje dajemo dokaze samo za dvije »transverzalne« implikacije: Primjer <4.10> i Primjer <4.11>. Dokazi ostalih implikacija izvode se na sličan način; rutinski su te će biti izostavljeni.

Primjer <4.10>. $\vdash^{opd}_{O\delta}\ w_0 : O\delta_Y\varphi \to O\neg\delta_X\neg\varphi$

1.		
2.	$w_0 : O\delta_Y\varphi$	
3.	$R_O(w_0, w_1)$	
4.	$w_1 : \delta_Y\varphi$	O Elim: 2, 3
5.	$R_{\delta Y}(w_1, w_1)$	δ refleksivnost
6.	$w_1 : \varphi$	δ_Y Elim: 4, 5
7.	$w_1 : \delta_X\neg\varphi$	
8.	$R_{\delta X}(w_1, w_1)$	δ refleksivnost
9.	$w_1 : \neg\varphi$	δ_X Elim: 7, 8
10.	$w_1 : \bot$	$\bot$ Intro: 6, 9
11.	$w_1 : \neg\delta_X\neg\varphi$	$\neg$ Intro: 7-10
12.	$w_0 : O\neg\delta_X\neg\varphi$	O Intro: 3-11
13.	$w_0 : O\delta_Y\varphi \to O\neg\delta_X\neg\varphi$	$\to$ Intro: 2-12

16
Nadznak 'C' treba sugerirati da je riječ o relativnom komplementu skupa RP^{imp}. Za $JP = \{Z,I,M,S,Z^*,I^*,M^*,S^*\}$, $RP^C = \{\varphi : \exists x \exists y(x \in JP \wedge y \in JP \wedge \varphi = x \Rightarrow y\} - RP^{imp}$.

17
»Neželjenim implikacijama« nazivamo implikacija iz RP^{C} . Segerberg ih navodi 14.

Primjer <4.11> $\vdash^{opd}_{O\delta} w_0 : \neg O \neg \delta_Y \varphi \rightarrow \neg O \delta_X \neg \varphi$

1.		
2.	$w_0 : \neg O \neg \delta_Y \varphi$	
3.	$w_0 : O \delta_X \neg \varphi$	
4.	$R_O(w_0, w_1)$	
5.	$w_1 : \delta_X \neg \varphi$	O Elim: 3,4
6.	$R_{\delta X}(w_1, w_1)$	δ refleksivnost
7.	$w_1 : \neg \varphi$	δ Elim: 5, 6
8.	$w_1 : \delta_Y \varphi$	
9.	$R_{\delta Y}(w_1, w$	δ refleksivnost
10.	$w_1 : \varphi$	δ Elim: 8, 9
11.	$w_1 : \bot$	$\bot$ Intro: 7, 10
12.	$w_1 : \neg \delta_Y \varphi$	$\neg$ Intro: 8-11
13.	$w_0 : O \neg \delta_Y \varphi$	O Intro: 4-12
14.	$w_0 : \bot$	$\bot$ Intro: 2, 13
15.	$w_0 : \neg O \delta_X \neg \varphi$	$\neg$ Intro: 3-14
16.	$w_0 : \neg O \neg \delta_Y \varphi \rightarrow \neg O \delta_X \neg \varphi$	$\rightarrow$ Intro: 2-15

Uvjet maksimalnosti

Poučak <4.12> Sustav $\vdash^{opd}_{O\delta}$ obilježene prirodne dedukcije za deontičko-prakseološku logiku ispunjava uvjet maksimalnosti za Kangerovu teoriju prava; to jest, za svaku implikaciju $\varphi \in RP^C$ vrijedi $\nvdash^{opd}_{O\delta} \varphi$.

Strategija dokaza

Dokaz tvrdnje o nemogućnosti dokazivanja »neželjenih implikacija« provest ćemo u nekoliko koraka. Prvo, postulirat ćemo jednu pojednostavljenu semantiku $\vDash_{O\delta}$ za deontički i prakseološki modalitet, Definicija <4.13> i Definicija <4.14>. U prvom koraku zaobići ćemo pitanje realističnosti predložene semantike. S obzirom na svrhu ovog dokaza, to pitanje nije važno jer je u ovom slučaju semantika tek sredstvo. Ipak, time ne želimo reći da će predložena semantika biti bezvrijedna. U drugom koraku dokazat ćemo pouzdanost sustava obilježene prirodne dedukcije s obzirom na uvedenu semantiku, Poučak <4.18>:

$$\Gamma \vdash^{opd}_{O\delta} \varphi \Rightarrow \Gamma \vDash_{O\delta} \varphi .$$

U trećem koraku, promatramo poseban slučaj praznog skupa premisa i kontrapozicijom prethodnog poučka dobivamo:

$$\nvDash_{O\delta} \varphi \Rightarrow \nvdash^{opd}_{O\delta} \varphi .$$

To znači da se rečenica za koju ne vrijedi da je istinita u svakom modelu (rečenica koja je osporiva, za koju postoji protuprimjer) ne može dokazati. Na kraju u četvrtom koraku, preostaje za svaku »nepoželjnu implikaciju« iz predstavnika skupa RP^C izgraditi protuprimjer, Primjer <4.19>.

Semantika jezika deontičko-prakseološke logike

Definicija <4.13> *Model za deontičko-prakseološku logiku.*

W je neprazni skup (skup „mogućih svjetova").

Relacije dostupnosti su:

$R_O \subseteq W \times W$, koja je serijalna relacija: $\forall x \exists y R_O(x, y)$,

$R_{\delta X} \subseteq W \times W$, $R_{\delta Y} \subseteq W \times W$, koje su refleksivne relacije.

Istinitosno vrednovanje je funkcija

V: *Atomarne rečenice* $\times W \mapsto \{\top, \bot\}$.

Interpretacija relacijske teorije je funkcija

$[\![\cdot]\!] : I \cup \{R_O, R_{\delta X}, R_{\delta Y}\} \mapsto W \cup (W \times W)$ takva da:

za svaki indeks w: $[\![w]\!] \in W$ i $[\![f(w)]\!] \in \{v : R_O(w,v)\}$,

za relacijske predikate $R_\odot$: $[\![R_\odot]\!] = R_\odot$, $\odot \in \{O, \delta X, \delta Y\}$.

Okvir je relacijska struktura $F = \langle W, R_O, R_{\delta X}, R_{\delta Y} \rangle$.

Model $\mathfrak{M}$ povezuje okvir s istinitosnim vrednovanjem i interpretacijom relacijske teorije:

$\mathfrak{M} = \langle \langle W, R_O, R_{\delta X}, R_{\delta Y} \rangle, V, [\![\cdot]\!] \rangle$.

Definicija <4.14> *Istinitost u modelu:*

$\mathfrak{M} \models w : P$ akko $V(P, [\![w]\!]) = \top$, ako je P propozicijsko slovo,

$\mathfrak{M} \models R_O(w,v)$ akko $\langle [\![w]\!], [\![v]\!] \rangle \in [\![R_O]\!]$,

$\mathfrak{M} \models R_{\delta X}(w,v)$ akko $\langle [\![w]\!], [\![v]\!] \rangle \in [\![R_{\delta X}]\!]$,

$\mathfrak{M} \models R_{\delta Y}(w,v)$ akko $\langle [\![w]\!], [\![v]\!] \rangle \in [\![R_{\delta Y}]\!]$,

$\mathfrak{M} \models w : \neg\varphi$ akko nije slučaj da $\mathfrak{M} \models w : \varphi$,

$\mathfrak{M} \models w : \varphi \wedge \psi$ akko $\mathfrak{M} \models w : \varphi$ i $\mathfrak{M} \models w : \psi$,

$\mathfrak{M} \models w : \varphi \vee \psi$ akko $\mathfrak{M} \models w : \varphi$ ili $\mathfrak{M} \models w : \psi$,

$\mathfrak{M} \models w : \varphi \rightarrow \psi$ akko ako $\mathfrak{M} \models w : \varphi$, onda $\mathfrak{M} \models w : \psi$,

$\mathfrak{M} \models w : \delta_X\varphi$ akko $\forall v : R_{\delta X}([\![w]\!], v) \rightarrow \mathfrak{M} \models v : \varphi$,

$\mathfrak{M} \models w : \delta_Y\varphi$ akko $\forall v : R_{\delta Y}([\![w]\!], v) \rightarrow \mathfrak{M} \models v : \varphi$,

$\mathfrak{M} \models w : O\varphi$ akko $\forall v : R_O([\![w]\!], v) \rightarrow \mathfrak{M} \models v : \varphi$,

$\mathfrak{M} \models w : P\varphi$ akko $\exists v : R_O([\![w]\!], v) \wedge \mathfrak{M} \models v : \varphi$.

Definicija <4.15> Rečenica $\varphi \in L_{w\,:\,O\delta LP}$ *posljedica* je skupa rečenica $\Gamma \subseteq L_{w\,:\,O\delta LP}$ akko je φ istinita u svakom modelu $\mathfrak{M}$ u kojem su istinite sve rečenice iz Γ, to jest, $\Gamma \models_{O\delta} \varphi$ akko za svaki $\mathfrak{M}$ takav da $\forall \psi : \psi \in \Gamma \rightarrow \mathfrak{M} \models {}_{O\delta}\psi$ vrijedi $\mathfrak{M} \models {}_{O\delta}\varphi$.

Primjedba <4.16> Dalje u tekstu pored punih koristit ćemo i skraćen zapise: $\models$ za $\models_{O\delta}$, $\vdash$ za $\vdash^{opd}_{O\delta}$. Značenje simbola φ ovisit će o kontekstu.[18] Na pojedinim mjestima $\odot$ se koristi kao varijabla koja može dobiti vrijednost jednog od tri ovdje razmatrana univerzalna modaliteta, to jest, $\odot \in \{O, \delta_X, \delta_Y\}$.

S obzirom na logiku čina, ovakva semantika opravdava mnoga prihvatljiva načela, poput onih koje navodi Kanger, to jest, (dRC) i (dT). Nu, ona opravdava i neprihvatljivo načelo

$$\delta_{\mathrm{A}}\top$$

po kojemu je bilo koji djelatnik A učinio da bude slučaj da vrijedi bilo koja logička istina. Hilpinen [9] naziva ovakvu semantiku čina »najjednostavnijom modalnom logikom čina« i pripisuje ju Chellasu.[19] Hilpinen daje sljedeće tumačenje.

»[…] ‘*a* je učinio da bude slučaj da *p*’ jest istinito u svijetu *u* ako i samo ako je *p* istinito u svakoj alternativi za *u*. Alternative danom svijetu *u* koje se ovdje promatraju jesu njegove ‘praktične’ alternative: to su svjetovi u kojima se djelatnik *a* ponaša jednako kao u svijetu *u*.« Hilpinen [9] str. 3

Unatoč njezinim slabostima, a s obzirom na značenje rečenica o radnjama, ova će semantika imati i analitičku i hermeneutičku vrijednost. Analitička vrijednost iskazuje se u negativnom smislu, pokazujući koje posljedice ne želimo u formalnoj semantici logike čina. Hermeneutička vrijednost pokazuje se u tumačenju Kangerovog teksta. Ova semantika objašnjava dvojno čitanje za ‘Shall $\neg$ Do φ’ koje nalazimo u Kangerovim radovima. On daje sljedeća neformalna tumačenja: (i[20]) X ne smije učiniti φ te (ii[21]) X se mora suzdržati od čina φ. Čitanje[22] ‘It shall be that not: X sees to it that φ’, koje nalazimo u ranijim radovima dvosmisleno je jer dopušta oba tumačenja, (i) i (ii). Tumačenje (i) vezuje negaciju uz deontički operator. Tumačenje (ii) vezuje negaciju uz prakseološki operator i sugerira postojanje dualnog egzistencijalnog prakseološkog modaliteta $\neg\delta$. Nu, složeno semantičko pitanje o odnosu činjenja, suzdržavanja od činjenja i ne-činjena ovdje nećemo razmatrati.

Lema <4.17> Neka su $\mathfrak{M} = \langle F, V, [\![\cdot]\!] \rangle$ i $\mathfrak{M}' = \langle F, V', [\![\cdot]\!]' \rangle$ dva modela izgrađena nad istim okvirom F te koja se poklapaju u vrednovanju svih propozicijskih slova, indeksa i relacija koja se javljaju u skupu nelogičkih simbola Σ. Tada za svaku rečenicu φ koja od nelogičkih simbola koristi jedino simbole iz Σ vrijedi: $\mathfrak{M} \models_{O\delta} \varphi$ ako i samo ako $\mathfrak{M}' \models_{O\delta} \varphi$.

Dokaz se izvodi indukcijom. Trebamo dokazati da ma koji oblik imala rečenica φ izgrađena nad signaturom Σ, njezina istinitosna vrijednost bit će jednaka u oba modela. U osnovnom slučaju, za atomarnu obilježenu rečenicu $w : P$ vrijedi $[\![w]\!] = [\![w]\!]'$ i $V(P, [\![w]\!]) = V'(P, [\![w]\!]')$. Slično vrijedi i za relacijske rečenice. Za slučajeve složenih rečenica induktivna hipoteza jamči poklapanje istinitosti u modelima kod manje složenih rečenica. Ispitajmo dva primjera: (i) $w : \neg\varphi$ i (ii) $w : O\varphi$. Kod (i) u smjeru s lijeva na desno pretpostavimo $\mathfrak{M} \models_{O\delta} w : \neg\varphi$. Po definiciji istinitosti, prethodno znači da nije slučaj da $\mathfrak{M} \models_{O\delta} w : \varphi$. Budući da je složenost potonje rečenice manja od složenosti početne, induktivna hipoteza jamči da nije slučaj da $\mathfrak{M}' \models_{O\delta} w:\varphi$. Po definiciji istinitosti, dobivamo traženo: $\mathfrak{M}' \models_{O\delta} w:\neg\varphi$. U suprotnom smjeru dokaz se provodi na isti način. Za (ii) u smjeru s lijeva na desno, pretpostavimo $\mathfrak{M} \models_{O\delta} w:O\varphi$. Neka je v proizvoljni indeks takav da $R_O(w,v)$. Po definiciji istinitosti, tada vrijedi $\mathfrak{M} \models_{O\delta} v:\varphi$. Rečenica $v:\varphi$ manjeg je stupnja složenosti od početne pa zato $\mathfrak{M}' \models_{O\delta} v:\varphi$. Univerzalna generalizacija daje traženo: $\mathfrak{M}' \models_{O\delta} w:O\varphi$. U smjeru s desna na lijevo dokazujemo na isti način. Dokazi za preostale rečenične oblike također su rutinski.

Pouzdanost

Poučak <4.18> Sustav obilježene prirodne dedukcije $\vdash^{opd}_{O\delta}$ pouzdan je u odnosu na semantiku $\models_{O\delta}$:

$$\Gamma \vdash^{opd}_{O\delta} \varphi \ \Rightarrow\ \Gamma \models_{O\delta} \varphi.$$

Dokaz treba pokazati da je svaka rečenica posljedica pretpostavki koje su na snazi u retku u kojem se ta rečenica nalazi. Tvrdnja će onda slijediti kao poseban slučaj, u kojemu se razmatrana rečenica nalazi na glavnoj crti dokaza (a tada su premise jedine pretpostavke na snazi u retku te rečenice). U Fitch-formatu dokaza pretpostavke koje su na snazi u pojedinom retku su sve one rečenice koje su zapisane iznad vodoravne crte te koje leže na istoj okomitoj crti ili leže na okomitoj crti koja se nalazi lijevo od crte na kojoj se nalazi rečenica pod razmatranjem. Svojstvo 'biti rečenica u dokazu' definirat ćemo induktivnim načinom: (i) pretpostavke su rečenice u dokazu, (ii) ako su $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ prethodne rečenice u dokazu i ako je ψ dobiven primjenom pravila dokaza iz $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ onda je ψ rečenica u dokazu. Primijenimo induktivni dokaz. U osnovnom koraku trebamo pokazati da bilo koja pretpostavka φ slijedi iz pretpostavki Γ na koje su na snazi u njezinom retku, to jest: $\varphi \in \Gamma \Rightarrow \Gamma \models_{O\delta}\varphi$. Pod pretpostavkom antecedensa, primjena definicije slijeda odmah daje traženo; ako $\mathfrak{M}$ verificira svaku rečenicu iz Γ a φ je jedna među njima, onda $\mathfrak{M}$ verificira φ. U induktivnom koraku za svako pravilo dokaza moramo pokazati da ako su prethodne rečenice u dokazu posljedice svojih pretpostavki, onda je rečenica dobivena primjenom pravila na tim rečenicama, također posljedica pretpostavki koje su na snazi u njezinom retku. Budući da su za sva pravila osim $\neg$*Intro* jednaka pravilima za istinitosno-funkcionalne veznike pod uvjetom istovjetnosti indeksa kojim su rečenice obilježene, dokaz njihove pouzdanosti ćemo izostaviti.[23] Pravilo »globalne negacije« razlikuje se od ostalih pravila za istinitosno-funkcionalne veznika jer na »ulazu« ima rečenice s različitim indeksima.

18
Ako se φ javlja bez operatora i indeksa, onda $\varphi \in L_{w:O\delta PL}$; ako se φ javlja u formuli $w:\varphi$, onda $\varphi \in L_{O\delta PL}$; i tako dalje.

19
Riječ je njegovoj disertaciji *The Logical Form of Imperatives* iz 1969.

20
U *Law and Logic* [12], str. 163.

21
U On *Realization of Human Rights* [12], str. 181 Kanger piše: »[...] pravilo R može implicirati, ovisno o vrsti (prava op. p.) T o kojemu je riječ, da se (na primjer) Y mora pobrinuti ili suzdržati se od toga da se pobrine za nešto.«

22
U *Rights and Parliamentarism* [12], str. 122.

23
Izostavljene dokaze za sustav neobilježene prirodne dedukcije čitatelj može naći u [3].

Induktivni korak za pravilo ¬Intro

Pretpostavke na snazi			
	k.	$w_i : \varphi$	
		.	
		.	
		.	
$\Gamma, w_i : \varphi$	l.	$w_j : \bot$	
Γ	m.	$w_i : \neg\varphi$	δ Intro: k-l

Trebamo dokazati: $\Gamma \models_{O\delta} w_i : \neg\varphi$. Za svrhu izravnog dokaza, pretpostavimo da proizvoljni model $\mathfrak{M}$ verificira svaku rečenicu iz skupa Γ pretpostavki na snazi u koraku *m*, to jest, (*) $\mathfrak{M} \models_{O\delta} \Gamma$. Induktivna hipoteza jamči pouzdanost koraka *l*: $\Gamma, w_i : \varphi \models_{O\delta} w_j : \bot$. Neistina (*falsum*) ne može biti istinita ni u kojoj točki, zato $\mathfrak{M} \not\models_{O\delta} w_j : \bot$. Budući da *falsum* jest posljedica pretpostavki na snazi u koraku *l*, mora biti slučaj da: (i) $\mathfrak{M} \not\models \psi$ za neki $\psi \in \Gamma$ ili (ii) $\mathfrak{M} \not\models w_i : \varphi$. Pretpostavka (*) isključuje disjunkt (i). Preostaje (ii), iz čega, po definiciji istinitosti, dobivamo traženo: $\mathfrak{M} \models_{O\delta} w_i : \neg\varphi$.

Induktivni korak za relacijsku teoriju

Budući da relacijska teorija za sustav $\vdash^{opd}_{O\delta}$ sadrži samo pravila bez premisa, treba pokazati da su njezine rečenice istinite u svakom modelu $\mathfrak{M}$, to jest (i) $\models R_O(w, f(w))$ i (ii) $\models R_\delta(w, w)$. Serijalnost relacije R_O i definicija za $[\![\cdot]\!]$ jamče istinitost za (i). Refleksivnost relacije R_δ osigurava istinitost za (ii).

Induktivni korak za univerzalne modalitete

Oblik pravila uvođenja za modalitete O, δ_X i δ_Y jednak je u sva tri slučaja. Neka je $\odot \in \{O, \delta_X, \delta_Y\}$. Općeniti oblik pravila uvođenja univerzalnih modaliteta je sljedeći:

Pretpostavke na snazi			
	k.	$R_\odot(w_i, w_j)$	
		.	
		.	
		.	
$\Gamma, R_\odot(w_i, w_j)$	l.	$w_j : \varphi$	
Γ	m.	$w_i : \odot\varphi$	$\odot$*Intro* : k-l

Pretpostavimo da je $\mathfrak{M} = \langle\langle W, R_O, R_{\delta X}, R_{\delta Y}\rangle, V, [\![\cdot]\!]\rangle$ proizvoljni model koji verificira Γ. Neka je $z \in W$ proizvoljno odabran i takav da $R([\![w_i]\!], z)$. Definirajmo model $\mathfrak{M}' = \langle\langle W, R_O, R_{\delta X}, R_{\delta Y}\rangle, V', [\![\cdot]\!]'\rangle$ na sljedeći način: (i) $\mathfrak{M}'$ je izgrađen nad istim okvirom kao i $\mathfrak{M}$, (ii) $\mathfrak{M}'$ se poklapa s $\mathfrak{M}$ s obzirom na interpretaciju propozicijskih slova, relacija i indeksa koji se javljaju u rečenicama iz $\Gamma \cup \{w_i : \odot\varphi\}$, (iii) $\mathfrak{M}'$

dodjeljuje indeksu w_j svijet z, to jest $[\![w_j]\!]=z$. Koristeći »lemu ograničenog izomorfizma« <4.17>, iz početne pretpostavke dokaza te načina kako je definiran $\mathfrak{M}'$ dobivamo da za svaki $\psi \in \Gamma \cup \{R_\odot(w_i, w_j)\}$ vrijedi $\mathfrak{M}' \vDash_{O\delta} \psi$. Po induktivnoj hipotezi: $\Gamma, R_\odot(w_i, w_j) \vDash_{O\delta} w_j : \varphi$. Zato vrijedi $\mathfrak{M}' \vDash_{O\delta} w_j : \varphi$. Budući da je z bio proizvoljno odabran, univerzalnom generalizacijom dobivamo $\forall v\left(R_\odot\left([\![w_i]\!], v\right) \to v : \varphi\right)$. Po definiciji istinitosti, dobivamo $\mathfrak{M}' \vDash_{O\delta} w_i : \odot\varphi$. Lema <4.17> jamči da tada vrijedi traženo: $\mathfrak{M} \vDash_{O\delta} w_i : \odot\varphi$.

Posljednji »sastojak« potreban u dokazu maksimalnosti zahtijeva izgradnju protuprimjera za implikacije iz skupa *m*, prikazane na Slici <4.5>. Ovdje navodimo samo jedan primjer; ostali su slični.

Primjer <4.19> *Protuprimjer za* $O\delta_Y\varphi \Rightarrow \neg O\neg\delta_X\varphi$. Definirajmo $\mathfrak{M} = \left\langle \left\langle W, R_O, R_{\delta X}, R_{\delta Y}\right\rangle, V, [\![\cdot]\!]\right\rangle$ na sljedeći način: $W = \{w_0, w_1, w_2\}$,

$R_O = \{\langle w_0, w_1\rangle, \langle w_1, w_2\rangle\}$, $R_{\delta Y} = \{\langle x, x\rangle : x \in W\}$,

$R_{\delta X} = \{\langle w_1, w_2\rangle\} \cup \{\langle x, x\rangle : x \in W\}$, $V(\varphi, w_1) = \top$, $V(\varphi, w_2) = \bot$,

$[\![w_i]\!] = w_i, [\![R_\odot]\!] = R_\odot$. Vrijedi: $\mathfrak{M} \vDash w_0 : O_{\delta Y}\varphi$ i $\mathfrak{M} \nvDash w_0 : \neg O \neg_{\delta X}\varphi$.

5. Dodatak: dokaz potpunosti

Kontekstom dokaza nazivamo skup $\Gamma \cup \Delta$, gdje je Γ skup obilježenih rečenica a Δ je skup relacijskih rečenica.

Definicija <5.1> Skup rečenica $\Gamma \subseteq L_{w\,:\,O\delta PL}$ nazivamo formalno konzistentnim akko $\Gamma \nvdash^{opd}_{O\delta} u : \bot$, za svaki $u \in I$.

Definicija <5.2> Zatvaranje skupa $(\Delta)^{O\delta}$ pod deduktivnim sustavom $\vdash^{opd}_{O\delta}$ je skup svih rečenica koje se mogu dokazati iz Δ: $(\Delta)^{O\delta} = \{\varphi : \Delta \vdash^{opd}_{O\delta} \varphi\}$.

Primjedba <5.3> Za relacijsku teoriju u sustavu $\vdash^{opd}_{O\delta}$ koriste se jedino pravila bez premisa. Zbog toga: $(\Delta)^{O\delta} = \Delta \cup \{\varphi : \ \vdash^{opd}_{O\delta} \varphi\}$.

Definicija <5.4> Skup $\Gamma \cup \Delta$ nazivamo maksimalno konzistentnim akko (i) on jest formalno konzistentan: za svaki $u \in I$ vrijedi $\Gamma \cup \Delta \nvdash^{opd}_{O\delta} u : \bot$, (ii) njegova relacijska teorija jest deduktivno zatvorena: $\Delta = (\Delta)^{O\delta}$, (iii) njegov skup indeksiranih rečenica je potpun: za svaki indeks w i svaku rečenicu $\varphi \in L_{w\,:\,O\delta PL}$ vrijedi ili $w : \varphi \in \Gamma$ ili $w : \neg\varphi \in \Gamma$.

Definicija <5.5> Skup I^* jest proširenje skupa I takvo da:

$$I^* = I \cup \left\{ w_S : \exists\varphi\exists w \begin{pmatrix} \varphi \in L_{O\delta PL} \wedge w \in I \\ \wedge \\ \left(S = w : \neg O\varphi \vee S = w : \neg\delta\varphi\right) \end{pmatrix} \right\}.$$

Drugim riječima, skup indeksnih slova proširit ćemo indeksima koji nastaju kada im se u podznaku upiše niz simbola koji prepisuje rečenice jezika deontičko-prakseološke logike. Svaka rečenica naznačene vrste na taj će način dobiti »svjedoka«, svijet koji jamči njezinu istinitost.

Definicija <5.6> Neka je skup $\Gamma \cup \Delta$ konzistentan skup rečenica jezika $L_{w\,:\,O\delta PL}$ izgrađenih nad indeksnim skupom I ; neka je $S_1, S_2, \ldots$ popis svih obilježenih rečenica jezika $L_{w\,:\,O\delta PL}$ izgrađenih nad indeksnim skupom I^*. Skup rečenica $MAX(\Gamma \cup \Delta)$ je skup rečenica konstruiran na sljedeći način:

$$\Gamma_0 \cup \Delta_0 = \Gamma \cup \Delta$$

$$\Gamma_{i+1} \cup \Delta_{i+1} =$$

$$= \begin{cases} \Gamma_i \cup \Delta_i \textit{ ako } \Gamma_i \cup \left\{S_{i+1}\right\} \cup \Delta_i \vdash u:\perp \quad \textit{za neki } u \in I^*, \\ \textit{inače} \begin{cases} \Gamma_i \cup \left\{S_{i+1}\right\} \cup \Delta_i \textit{ ako } S_{i+1} \neq w:\neg \odot \varphi, \\ \Gamma_i \cup \left\{w:\neg \odot \varphi, w_{\neg \odot \varphi}:\neg \varphi\right\} \cup \Delta_i \cup \left\{R_{\odot}(w, w_{\neg \odot \varphi})\right\} \\ \textit{ako } S_{i+1} = w:\neg \odot \varphi. \end{cases} \end{cases}$$

$$MAX(\Gamma \cup \Delta) = \bigcup_{i \geq 0} \Gamma_i \cup \left(\bigcup_{i \geq 0} \Delta_i \right)^{O\delta}$$

Tvrdnja <5.7> Svaki skup $\Gamma_i \cup \Delta_i$ dobiven konstrukcijom opisanom u Definiciji <5.6> jest konzistentan.

Dokaz provodimo indukcijom. U osnovnom slučaju: $\Gamma_0 \cup \Delta_0$ je konzistentan skup jer je istovjetan skupu $\Gamma \cup \Delta$, koji jest konzistentan. U induktivnom koraku trebamo dokazati: ako je $\Gamma_i \cup \Delta_i$ konzistentan, onda je $\Gamma_{i+1} \cup \Delta_{i+1}$ konzistentan. Ispitajmo slučajeve. Prvo, (i) ako $\Gamma_i \cup S_{i+1} \cup \Delta_i \vdash u:\perp$, onda je skup $\Gamma_{i+1} \cup \Delta_{i+1} = \Gamma_i \cup \Delta_i$ konzistentan (jer je po induktivnoj hipotezi $\Gamma_i \cup \Delta_i$ konzistentan skup). U drugom slučaju, (ii) $\Gamma_i \cup \left\{S_{i+1}\right\} \cup \Delta_i \nvdash u:\perp$, za svaki $u \in I^*$. U prvom »pod-slučaju« ako $S_{i+1} \neq w:\neg \odot \varphi$, onda $\Gamma_{i+1} \cup \Delta_{i+1} = \Gamma_i \cup \left\{S_{i+1}\right\} \cup \Delta_i$, a potonji skup je konzistentan po pretpostavci (ii). Za drugi »pod-slučaju« $S_{i+1} = w:\neg \odot \varphi$ pretpostavimo suprotno:

$\Gamma_i \cup \left\{w:\neg \odot \varphi, w_{\neg \odot \varphi}:\neg \varphi\right\} \cup \Delta_i \cup \left\{R_{\odot}(w, w_{w:\neg \odot \varphi})\right\} \vdash u:\perp$,

za neki $u \in I^*$.

Zahvaljujući činjenici da je $w_{w:\neg \odot \varphi}$ novi indeks, to jest, indeks koji se ne javlja u $\Gamma_i \cup \Delta_i$, znamo da postoji sljedeći dokaz:

	$\vdots \; \}\Gamma_i \cup \Delta_i$	
m.	$R_{\odot}(w, w_{w:\neg\odot\varphi})$	
n.	$w:\neg\odot\varphi$	
	$\vdots$	
o.	$u:\perp$	
p.	$w:\neg\neg\odot\varphi$	$\neg Intro$: n-o
r.	$w:\odot\varphi$	$\neg Elim$: p
s.	$w_{w:\neg\odot\varphi}:\varphi$	$\odot Elim$: m,r
t.	$w:\odot\varphi$	$\odot Intro$: m-s

Dakle, $\Gamma_i \cup \Delta_i \vdash w:\odot\varphi$. Nu, tada $\Gamma_i \cup \{S_{i+1}\} \cup \Delta_i \vdash w:\perp \quad u \in I^*$ protivno pretpostavci (ii). Kontradikcija.

Tvrdnja <5.8> Skup $MAX(\Gamma \cup \Delta)$ je maksimalno konzistentan.

Dokaz zahtijeva da pokažemo da su zadovoljeni uvjeti (i), (ii) i (iii) iz Definicije <5.4>. Uvjet (ii) je zadovoljen po Definiciji <5.6>. Uvjet (i) zahtijeva da skup $\bigcup_{i\geq 0}\Gamma_i \cup \left(\bigcup_{i\geq 0}\Delta_i\right)^{O\delta}$ bude formalno konzistentan. Pretpostavimo suprotno, to jest, pretpostavimo da postoji dokaz $\bigcup_{i\geq 0}\Gamma_i \cup \left(\bigcup_{i\geq 0}\Delta_i\right)^{O\delta} \vdash v:\perp$, za neki $v \in I^*$. Budući da su dokazi »konačni predmeti« prethodni dokaz koristi konačan broj premisa. Njih možemo označiti s $\Gamma' \cup \Delta'$ i tada će vrijediti: $\Gamma' \cup \Delta' \vdash v:\perp$, za neki $v \in I^*$. Definirajmo funkciju du, koja određuje »datum usvajanja« rečenice φ birajući najmanju oznaku među oznakama skupova u kojima se φ javlja: $du(\varphi) = \min\{i : \varphi \in X_i\}$. Za skup premisa $\Gamma' \cup \Delta'$ izdvojimo oznaku »najkasnijeg« (»najmlađeg«) skupa koji ih obuhvaća: $m = \max\left\{ i : \exists\varphi \begin{pmatrix} (\varphi \in \Gamma' \vee \varphi \in \Delta') \\ \wedge du(\varphi) = i \end{pmatrix} \right\}$. Budući da po Definiciji <5.6> vrijedi: $i \geq j \Rightarrow \Gamma_j \cup \Delta_j \subseteq \Gamma_i \cup \Delta_i$, očigledno je da $\Gamma' \cup \Delta' \subseteq \Gamma_m \cup \Delta_m$. Tvrdnja <5.7> jamči konzistentnost skupa $\Gamma_m \cup \Delta_m$. Budući da podskupovi nasljeđuju konzistentnost svojih nadskupova, vrijedi $\Gamma' \cup \Delta' \nvdash v:\perp$, za svaki $v \in I^*$. Kontradikcija. Preostaje dokazati uvjet maksimalnosti (iii). Pretpostavimo suprotno. Neka vrijedi $w:\varphi \notin MAX(\Gamma \cup \Delta)$ i $w:\neg\varphi \notin MAX(\Gamma \cup \Delta)$, za neki $w \in I^*$. Rečenica $w:\varphi$ javlja se na nekom mjestu na popisu svih rečenica jezika $L_{w:O\delta PL}$ izgrađenih nad indeksnim skupom I^*. Označimo to mjesto s $i+1,\ i \geq 0$. Budući da $w:\varphi \notin MAX(\Gamma \cup \Delta)$, tada po Definiciji <5.6> vrijedi $\Gamma_i \cup \{w:\varphi\} \cup \Delta_i \vdash v:\perp$, za neki $v \in I^*$. Prethodno jamči postojanje dokaza koji omogućuje da se pod pretpostavkom $w:\varphi$ izvede *falsum*. Taj dokaz možemo nastaviti koristeći pravilo $\neg Intro$ tako da dobijemo $w:\neg\varphi$. Dakle, $\Gamma_i \cup \Delta_i \vdash w:\neg\varphi$. Skup $\Gamma_i \cup \Delta_i$ može se konzistentno proširiti s $w:\neg\varphi$. Definicija <5.6> jamči postojanje takvog proširenja $\Gamma_{i+k} \cup \Delta_{i+k}$ u kojemu vrijedi $w:\neg\varphi \in \Gamma_{i+k} \cup \Delta_{i+k}$. Tada, ponovo po Definiciji <5.6>, $w:\neg\varphi \in MAX(\Gamma \cup \Delta)$. Kontradikcija.

Lema <5.9> Svaki $\vdash_{O\delta}^{opd}$-konzistentni skup $\Gamma \cup \Delta$ može se proširiti do maksimalno konzistentnog skupa $\Gamma^* \cup \Delta^*$.

Dokaz dobivamo ako postavimo $\Gamma^* \cup \Delta^* = MAX(\Gamma \cup \Delta)$ i pozovemo se na Tvrdnju <5.8>.

Tvrdnja <5.10> Za maksimalno konzistentni skup $\Gamma^* \cup \Delta^*$ i $\varphi \in L_{w\,:\,O\delta PL}$:

$$\Gamma^* \cup \Delta^* \vdash \varphi \text{ akko } \varphi \in \Gamma^* \cup \Delta^*.$$

Dokaz zahtijeva da pokažemo da tvrdnja vrijedi za sve oblike koje rečenica φ može imati. Smjer s desna na lijevo očigledno vrijedi za bilo koji rečenični oblik, jer svaka rečenica dokazuje sama sebe. U smjeru s lijeva na desno ispitajmo slučaj $\odot\psi$. Pretpostavimo suprotno: $\Gamma^* \cup \Delta^* \vdash \odot\psi$ i $\odot\psi \notin \Gamma^* \cup \Delta^*$. Tada, zbog potpunosti (Lema <5.9>) vrijedi $\neg\odot\psi \in \Gamma^* \cup \Delta^*$. Pravilo $\bot Intro$ omogućuje dokaz $\Gamma^* \cup \Delta^* \vdash \bot$. Dakle, $\Gamma^* \cup \Delta^*$ nije konzistentan, ali to nije moguće. Ostali su slučajevi slični.

Primjedba <5.11> Skup svih nelogičkih simbola koji se javljaju u skupu formula Ψ označit ćemo sa $sig(\Psi)$.

Definicija <5.12> Kanonski model $\mathfrak{W}^*$ obzirom na maksimalno konzistentni skup $\Gamma^* \cup \Delta^*$ jest model:

$$\mathfrak{W}^* = \langle \langle W^*, R_O^*, R_{\delta X}^*, R_{\delta Y}^* \rangle, V^*, [\![\cdot]\!]^* \rangle,$$

gdje:

$$W^* = \{ w : w \in sig(\Gamma^* \cup \Delta^*) \},$$

$$R_O^* = \{ \langle [\![x]\!]^*, [\![y]\!]^* \rangle : R_O(x,y) \in \Delta^* \},$$

$$R_{\delta X}^* = \{ \langle [\![x]\!]^*, [\![y]\!]^* \rangle : R_{\delta X}(x,y) \in \Delta^* \},$$

$$R_{\delta Y}^* = \{ \langle [\![x]\!]^*, [\![y]\!]^* \rangle : R_{\delta Y}(x,y) \in \Delta^* \},$$

$$V^*(\varphi, [\![w]\!]^*) = \top \text{ akko } w:\varphi \in \Gamma^*,$$

$$[\![w]\!]^* = w.$$

Lema <5.13> $\varphi \in \Gamma^* \cup \Delta^*$ akko $\mathfrak{W}^* \vDash \varphi$.

Dokaz se provodi indukcijom. U osnovnim slučajevima φ je ili relacijska rečenica, $R_\odot(w,v)$ ili indeksirano propozicijsko slovo, $w:P$. Ispitajmo prvi slučaj. Ako $R_\odot(w,v) \in \Gamma^* \cup \Delta^*$, onda $[\![R_\odot]\!]^* = \{ \langle [\![x]\!]^*, [\![y]\!]^* \rangle : R_\odot(x,y) \in \Delta^* \}$ i $[\![w]\!]^* = w$, $[\![v]\!]^* = v$.

Dobili smo traženo: $\langle [\![w]\!]^*, [\![v]\!]^* \rangle \in [\![R\odot]\!]^*$. U smjeru s desna na lijevo, pretpostavka $\langle [\![w]\!]^*, [\![v]\!]^* \rangle \in [\![R\odot]\!]^*$ odmah daje traženo, $R\odot(w,v) \in \Gamma^* \cup \Delta^*$. U induktivnom koraku ispitajmo samo slučaj $w : \odot\psi$. Pretpostavimo (i) $w : \odot\psi \in \Gamma^* \cup \Delta^*$. (ii) Neka je v proizvoljno odabran svijet takav da $R\odot(w,v)$. Po Tvrdnji <5.10> (i) implicira $\Gamma^* \cup \Delta^* \vdash w : \odot\psi$. Prethodno i (ii) primjenom pravila $\odot Elim$ jamče da $\Gamma^* \cup \Delta^* \vdash v : \psi$. Tada, po Tvrdnji <5.10> $v : \psi \in \Gamma^* \cup \Delta^*$. Po induktivnoj hipotezi, Lema <5.13> vrijedi za $v : \psi$ rečenice čija je složenost manja od složenosti za $w : \odot\psi$. Zato, $\mathfrak{W}^* \models v : \psi$. Budući je v bio proizvoljno odabran, možemo generalizirati: za svaki v takav da $R\odot(w,v)$ vrijedi da $\mathfrak{W}^* \models v : \psi$. Prema tome, $\mathfrak{W}^* \models w : \odot\psi$. U smjeru s desna na lijevo, dokazivat ćemo kontrapoziciju. Pretpostavimo $w : \odot\psi \notin \Gamma^* \cup \Delta^*$. Tada, zbog potpunosti, vrijedi $w : \neg\odot\psi \in \Gamma^* \cup \Delta^*$. Definicija <5.6> jamči da $R\odot(w, w_{w:\neg\odot\psi}) \in \Gamma^* \cup \Delta^*$ i da $w_{w:\neg\odot\psi} : \neg\psi \in \Gamma^* \cup \Delta^*$. Koristeći Definiciju <4.14> dobivamo traženo $\mathfrak{W}^* \not\models w : \odot\psi$.

Teorem <5.14> Sustav obilježene prirodne dedukcije $\vdash^{opd}_{O\delta}$ potpun je u odnosu na semantiku $\models_{O\delta}$:

$$\Gamma \models_{O\delta} \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash^{opd}_{O\delta} \varphi .$$

Dokaz izvodimo pokazujući da vrijedi kontrapozicija. Pretpostavimo $\Gamma \cup \Delta \nvdash \varphi$. Tada vrijedi $\Gamma \cup \Delta \cup \{\neg\varphi\} \nvdash \bot$. Budući da je taj skup formalno konzistentan, on se u skladu s Lemom <5.9> može proširiti do maksimalno konzistentnog skupa $MAX(\Gamma \cup \Delta \cup \{\neg\varphi\})$. Zbog njegove konzistentnosti, vrijedi tvrdnja $MAX(\Gamma \cup \Delta \cup \{\neg\varphi\}) \nvdash \varphi$. Koristeći tu tvrdnju i Tvrdnju <5.10> dobivamo: $\varphi \notin MAX(\Gamma \cup \Delta \cup \{\neg\varphi\})$. Iz potonjeg, pomoću Leme <5.13> dobivamo da kanonski model $\mathfrak{W}^{MAX(\Gamma \cup \Delta \cup \{\neg\varphi\})}$ izgrađen na osnovi skupa $MAX(\Gamma \cup \Delta \cup \{\neg\varphi\})$ verificira sve rečenice iz $\Gamma \cup \Delta$ ali ne verificira φ. Egzistencijalna generalizacija daje traženo: postoji model $\mathfrak{W}$ takav da $\mathfrak{W} \models \Gamma \cup \Delta$ i $\mathfrak{W} \not\models \varphi$, to jest, $\Gamma \cup \Delta \not\models \varphi$.

6. Bibliografija

[1] Åqvist, Lennart (2000) »Stig Kanger's Theory of Rights: Bearers and Counterparties, Sources-of-law and the Hansson Petaluma Example«. U: [13] str. 173–183.

[2] Åqvist, Lennart (1984) »Deontic Logic«. U: D. Gabbay i F. Guenthner (ured.) *Handbook of Philosophical Logic*, Vol. II, str. 605–714, D. Reidel Publishing Company.

[3] Barwise, Jon i Etchemendy, John (2000) *Language, Proof and Logic*. Center for the Study of Language and Information, Stanford, California.

[4] Basin, David, Matthews, Seán i Viganò, Luca (1998) »Natural Deduction for Non-Classical Logics«. *Studia Logica* **60**:119–160.

[5] Basin, David, Matthews, Seán i Viganò, Luca (1997) »Labelled propositional modal logics: theory and practice«. *Journal of Logic and Computation* **7**: 685–717.

[6] Blackburn, Patrick, de Rijke, Maarten i Venema, Yde (2001) *Modal Logic*. Cambridge University Press.

[7] Fitch, Frederic (1963) »A Logical Analysis of Some Value Concepts«. *The Journal of Symbolic Logic* **26**: 135–142.

[8] Herrestad, Henning i Krogh, Christen (1995) »Deontic Logic Relativised to Bearers and Counterparties«. U: J. Bing i O. Torvund (ured.) *Anniversary Anthology in Computers and Law*, str. 453–522. Complex-Tano.

[9] Hilpinen, Risto. (1997) »On Action and Agency«. U: E. Ejerhed i S. Lindström (ured.), *Logic, Action and Cognition – Essays in Philosophical Logic*, str. 3–27. Kluwer Academic Publishers.

[10] Hilpinen, Risto (2000) »Stig Kanger on Deontic Logic«. U: G. Holmström-Hintikka, S. Lindström i R. Sliwinski (ured.), *Collected Papers of Stig Kanger with Essays on his Life and Work, Vol. II*, str. 131–149. Kluwer Academic Publishers.

[11] Hohfeld, Wesley Newcomb (1913) »Some Fundamental Legal Conceptions as Applied in Judicial Reasoning«. I. *Yale Law Journal* **23**: 16–59. Ponovo objavljeno u: Wesley Newcomb Hohfeld (1923) *Fundamental Legal Conceptions as Applied in Judicial Reasoning and Other Legal Essays*. Priredio: Walter Wheeler Cook . str. 3–64. Yale University Press, New Haven.

[12] G. Holmström-Hintikka, S. Lindström i R. Sliwinski (ured.) *Collected Papers of Stig Kanger with Essays on his Life and* Work, Vol. I. Kluwer Academic Publishers, 2000.

[13] G. Holmström-Hintikka, S. Lindström i R. Sliwinski (ured.) *Collected Papers of Stig Kanger with Essays on his Life and Work, Vol. II*. Kluwer Academic Publishers, 2000.

[14] Kanger, Stig (2000) »Law and Logic«. U: [12] str. 146–169. Izvorno objavljeno u: *Theoria* **38** (1972), 105–129.

[15] Kanger, Stig (2000) »Rights and Parlamentiarism«. U: [12] str. 120–145. Izvorno objavljeno u: *Theoria* **32** (1966), 85–115.

[16] Kovač, Srećko (200X) »Nacrt modalne logike«. (http://filist.fizg.hr/~skovac/Modalnahttp.pdf).

[17] Lindahl, Lars (2000) »Stig Kanger's Theory of Rights«. U: [13] str. 151–171.

[18] Makinson, David (2004) »Natural deduction and logically pure derivations«. *PhiNews*, April 2004. (http://www.phinews.ruc.dk).

[19] Matulović, Miomir (1996) *Ljudska prava: Uvod u teoriju ljudskih prava*. Biblioteka Filozofska istraživanja (92), Zagreb.

[20] Read, Stephen (2005) *Harmony and Modality*. [rukopis izlaganja na UNILOG'05: First World Congress on Universal Logic, Montreux, travanj 2005.].

[21] Segerberg, Krister (1993) *A Concise Introduction to Propositional Dynamic Logic*. Uppsala: Department of Philosophy.

[22] Segerberg, Krister (1992) »Getting Started: Beginnings in the Logic of Action«. *Studia Logica* **51**: 347–378.

[23] Segerberg, Krister. (1990) »Validity and Satisfaction in Imperative Logic«. *Notre Dame Journal of Formal Logic* **31**: 203–221.

[24] Vrban, Duško (2003) *Država i pravo*. Golden marketing, Zagreb.

[25] Walton, Douglas (1976) »St. Anselm and the Logical Syntax of Agency«. *Franciscan Studies* **36**: 298–312.

[26] Žarnić, Berislav (2004) *Pravo na obrazovanje i Kangerova teorija prava*. [izlaganje na 13. Danima Frane Petrića: Filozofija i obrazovanje u suvremenom društvu] (http://www.vusst.hr/~logika/Kanger.pdf).

Berislav Žarnić

A Labelled Deduction System for Kanger's Theory of Rights

Abstract

Basin-Matthews-Viganò [4][5] approach to construction of labelled deduction systems for normal modal logics is adapted to "Fitch proof-format", and it is applied to the language of deontic-praxeological logic. Segerberg's [22] suggestion on how to asses the adequacy of a logic for Kanger's theory of rights is being formally explicated and it is proved that herewith proposed system of labelled deduction satisfies Segerberg's criteria of adequacy. For the purpose of building the proof a semantics is given, which connects "the simplest semantics of action" [9] with standard semantics of deontic logic [2]. Soundness and completeness of the proposed labelled deduction with respect to aforementioned semantics is proved.

Keywords

Stig Kanger, theory of rights, logic, natural deduction